„Visualisierung mit Technologie – Chancen und Gefahren“

HELMUT HEUGL

Digitale Technologien wie GeoGebra, TI Nspire CAS oder Casio Class Pad ermöglichen eine neue Qualität der Visualisierung im Mathematikunterricht. Ziel dieses Vortrags ist es aufzuzeigen, welchen zentralen Stellenwert Darstellungen im Allgemeinen und Visualisierungen im Besonderen für das Lehren und Lernen von Mathematik haben und wie sich die Darstellungsmöglichkeiten und damit das Lernen durch den Einfluss von Technologie verändern.

Die Rolle der Visualisierung wird in diesem Referat gezeigt durch Aufgaben

- zur Unterstützung des Begriffsbildungsprozesses in der Analysis,
- zur graphischen Lösung von Problemen,
- zur Simulation dynamischer Prozesse
- zum Aufzeigen von Gefahren bei Nutzung von Visualisierungen.

> *„Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding.“ (*Zimmermann und Cunningham 1991, S. 3)

1. Die Rolle der Visualisierung im Lernprozess

1.1 Lernen durch Variation von Prototypen/Repräsentationen

Allgemeinbegriffe werden mittels prototypischer Repräsentationen oder Vertretern verfügbar gemacht für kognitive Funktionen wie Gedächtnis, Problemlösen, Schlussfolgerungen, Herstellen von Beziehungen u.v.a.m. So wird z.B. der Begriff „Tisch“ für ein Kind nicht durch eine saubere Definition seitens des Vaters verfügbar sondern durch die Begegnung mit verschiedenen Prototypen. (Dörfler 1991, S. 65)

Die Verfügbarkeit einzelner Prototypen alleine reicht für einen erfolgreichen Lernprozess nicht aus. Die zentrale kognitive Aktivität ist die ständige Variation der Darstellungsformen und die Interaktion zwischen verschiedenen Prototypen.

Der Computer eröffnet eine neue Qualität des Lernens mit Prototypen. Digitale Technologien wie GeoGebra, TI-Nspire CAS oder Casio ClassPad mit ihren vielfältigen graphischen, symbolischen oder tabellarischen Darstellungsmöglichkeiten haben nicht nur einen Verstärkereffekt, das heißt, sie unterstützen Kognition, sondern sie verändern das Denken, sie werden zu einem Teil der Kognition. Eine Besonderheit des computerunterstützten Lernens ist die parallele Verfügbarkeit verschiedener Darstellungsformen, die wiederum eine neue Qualität von Interaktionen zwischen den Prototypen ermöglicht. Außerdem bieten diese digitalen Technologien Prototypen an, die vorher im Schulunterricht nicht verfügbar waren. Man denke zum Beispiel an rekursive Modelle.

1.2 Prototypenlernen am Beispiel des Funktionsbegriffs

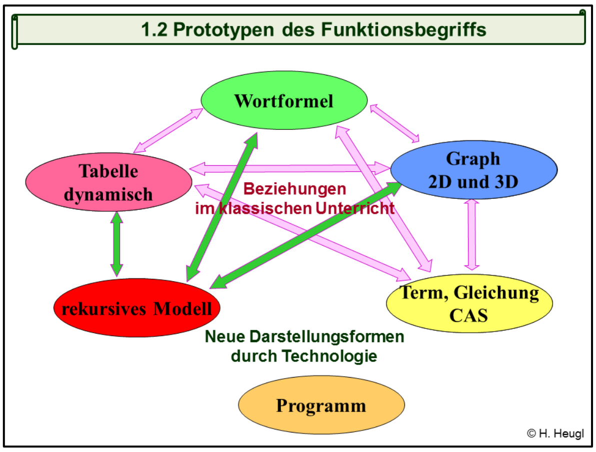
Der erste Schritt zum Funktionsbegriff erfolgt ja nicht durch eine saubere Definition, sondern durch das Angebot verschiedener Darstellungsformen, die die Aufmerksamkeit auf die charakteristischen Kennzeichen des Funktionsbegriffs lenken. Die zentrale Lernaktivität ist dabei wieder das Herstellen von Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen.

Verfügbare Darstellungsformen:

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft *(ÖMG)*, Heft 52, 2019, S. 49-66.

Traditioneller Mathematikunterricht	Technologieunterstützter Mathematikunterricht
Verfügbare Prototypen: • Wortformel • Term • Graph (2D) • Tabelle (statisch)	Zusätzliche Prototypen: • Das rekursive Modell • Tabelle (dynamisch) • Graph (3D) • Module (Funktionen, Programme)

Durch Technologienutzung verändern sich Prototypen: Tabellen werden „dynamisch", man denke nur an die Möglichkeiten der Tabellenkalkulation. Graphisch stehen verschiedene Darstellungsformen zur Verfügung, wie z.B. Parameterdarstellung, Punktgraphen und auch 3D-Darstellungen. Algebraische Darstellungsformen werden durch die Verfügbarkeit von Computer Algebra Systemen (CAS) grundlegend verändert.



Während im traditionellen Unterricht verschiedene Prototypen seriell zur Verfügung stehen (gegeben ist der Term – suche den Graphen!) bieten technologische Werkzeuge verschiedene Prototypen parallel an (wenn man den Term gegeben hat, steht auch der Graph zur Verfügung. Das bedeutet eine grundlegende Veränderung des kognitiven Prozesses, die auch im didaktischen Konzept des Lernens ihren Niederschlag findet.

1.3 Die graphischen Darstellungsformen bei Technologieeinsatz

Man kann sagen, der Mensch ist ein visuelles Lebewesen. Von den aus dem Körper ins Gehirn führenden Nervenfasern entfällt ein großer Anteil auf die beiden Sehnerven. Daraus ergeben sich sehr gute Fähigkeiten zur Erkennung, Analyse und Verarbeitung von Mustern. Für den Unterricht in der Schule würde dies bedeuten, dass Lerninhalte so oft wie möglich visualisiert werden sollten.

Das Wort „Visualisierung" wird in zwei Bedeutungen verwendet. Einerseits bezeichnet Visualisierung den Vorgang des Visualisierens, man spricht dann von „Visualisierung als Prozess". Andererseits werden die Ergebnisse dieses Prozesses als Visualisierungen bezeichnet. Man spricht dann von „Visualisierung als Produkt".

Didaktisch gesehen ist ein sinnvoller Umgang mit ikonischen Darstellungen vor allem dann gegeben, wenn sie nicht als starre Objekte angesehen werden, sondern mit ihnen flexibel und beweglich umgegangen wird. Das heißt, dass der vielfältige Ertrag der Visualisierung für einen erfolgreichen Lehr- und Lernprozess erst durch die Verknüpfung mit anderen Darstellungsformen wirksam wird.

Diese Forderung nach dynamischem Tun und Denken zeigt schon, **dass Technologie eine neue Qualität der Visualisierung bewirkt.** Durch Technologie sind graphische Darstellungen einfacher und direkt verfügbar. Visuelle Darstellungen können vielfältig variiert werden und es können verschiedene Darstellungsformen eines mathematischen Objektes miteinander interaktiv agieren.

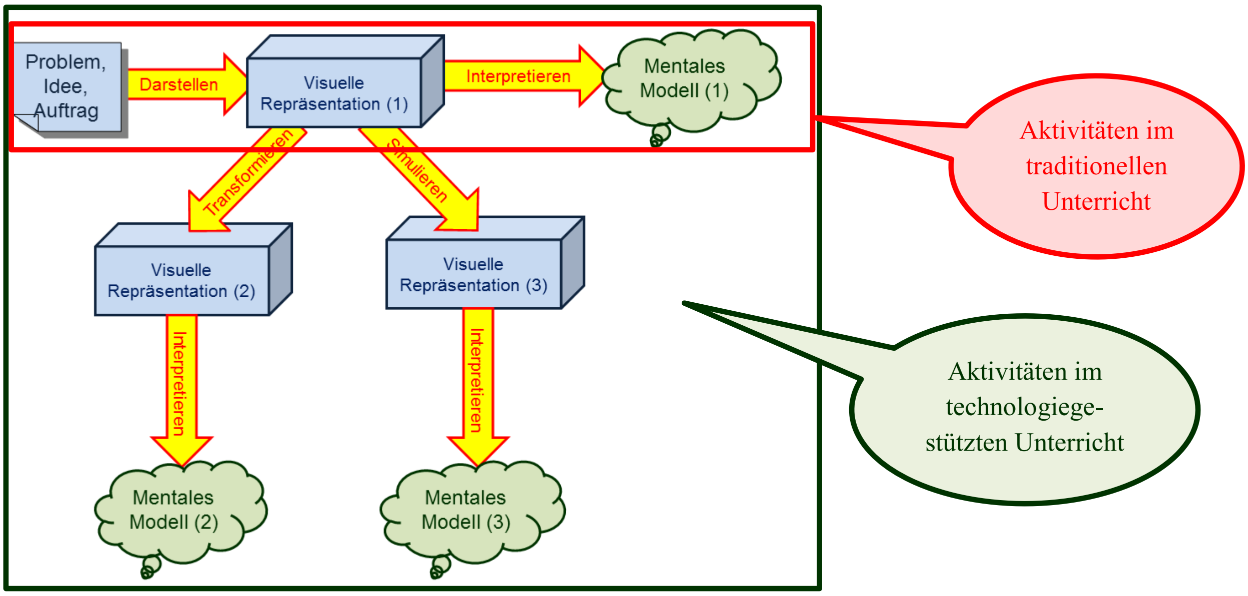
Während im traditionellen Unterricht graphische Darstellungsformen eher dazu genutzt wurden, dass die damit verbundenen Informationen passiv übernommen wurden, umfasst im Zeitalter der Technologie der Begriff „Visualisierung“ wesentlich mehr, insbesondere aktivere Tätigkeiten der Lernenden.

Wozu nutzt man überhaupt Darstellungen mathematischer Objekte? Die beim Arbeiten mit Repräsentationen solcher Objekte entwickelten Vorstellungen, Kenntnissen und Fähigkeiten sollen zu einem Aufbau „mentaler Modelle“ führen. (Weigand 2009, S. 100).

> **„Externe Repräsentationen“ führen zum Aufbau von „Internen Repräsentationen“, zur Entwicklung „Mentaler Modelle“**.

Versuch einer Veranschaulichung eines Lernprozesses:

Charakteristische Handlungen beim Visualisieren:



Durch die Möglichkeit, visuelle Darstellungen einfach zu transformieren und durch Simulation entstehen neue, veränderte Prototypen der mathematischen Objekte und führen damit auch zu veränderten mentalen Modellen.

Vorteile der Technologienutzung:

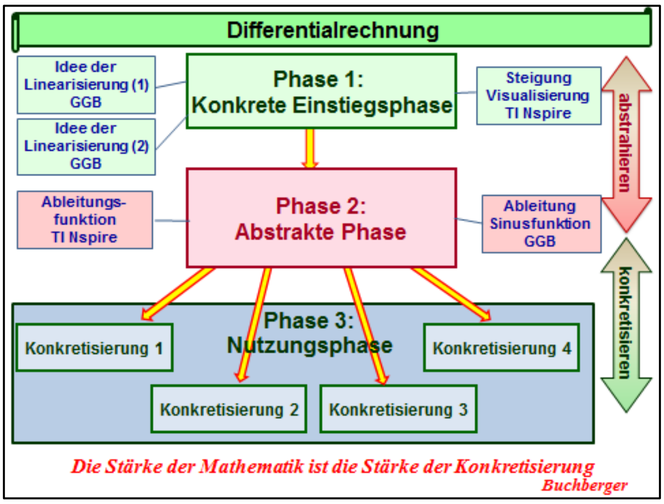
- Darstellen wird einfacher
- Es gibt neue Darstellungsmöglichkeiten wie z. B. 3D-Graphik
- Transformieren und vor allem Simulieren wird oft erst mit Technologie möglich
- Interaktion mit anderen Repräsentationsformen wird einfacher, andere Prototypen sind parallel verfügbar.
- Aktives Visualisieren führt zu verbesserten mentalen Modellen

2. Visualisierung zur Unterstützung des Begriffsbildungsprozesses in der Analysis (Differentialquotient, bestimmtes Integral)

„Es ist unumstritten, dass das Umgehen mit Begriffen zu einer der Kerntätigkeiten des Mathematikunterrichts gehört. Wir denken in Begriffen, unsere Sprache besteht aus Begriffen, wir argumentieren mit Begriffen, wir lösen Probleme mit Begriffen und vieles mehr“ (Leuders 2005, S. 208)

Bei der Entwicklung der Mathematik in den Lernenden aber auch generell in der Wissenschaft kann man drei charakteristische Phasen beobachten:

2.1 Differentialrechnung



Der Einstieg erfolgt meist über ein konkretes Problem, bei der Differentialrechnung das Problem „von der Sekanten- zur Tangentensteigung". Danach sollte man sich aber vom konkreten Problem lösen und in einer abstrakten Phase den Begriff des Differentialquotienten entwickeln. Erst dieses Abstrahieren eröffnet das Tor für viele Anwendungen.

Bei den folgenden Aufgaben wurden die technologischen Werkzeuge GeoGebra („ggb") und TI Nspire („tns") verwendet.

In der **konkreten Einstiegsphase** der Differentialrechnung findet man in den Schulbüchern fast ausschließlich das Thema „Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung". Denkbar wäre auch das Problem „Von der mittleren zur Momentangeschwindigkeit".

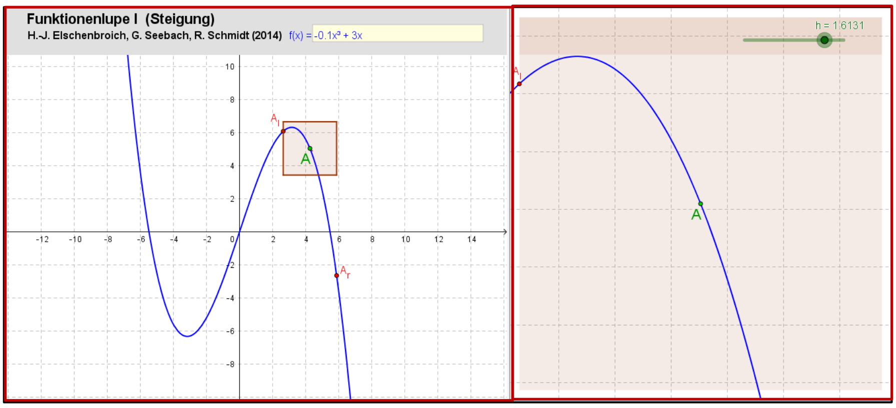
Auch die fundamentale Idee der Linearisierung kann durch Visualisierung verständlich gemacht werden: Es gibt eine Familie von Funktionen („differenzierbare Funktionen"), die man in der Umgebung eines Punktes durch eine lineare Funktion approximieren kann.

Aufgabe 1: Funktionenlupe 1 (ggb)

(Elschenbroich (1), 2014)

Gegeben: Funktion $f: f(x) = -0.1 \cdot x^3 + 3 \cdot x$

Im linken Fenster ist der Graph einer Funktion f im Standard-Zoom zu sehen. Um einen Punkt A auf dem Graphen ist ein Quadrat hervorgehoben, das sich von A aus um h nach links, rechts, unten und oben erstreckt. Die Größe dieses Quadrats kann über den Schieberegler h verändert werden. Dieses Quadrat wird dann in das zweite Fenster vergrößert kopiert, sodass es dort immer den gleichen Platz ausfüllt.



Wird h immer weiter verkleinert (bis h = 0.0001), so sieht man, dass der Graph von f dann im rechten Fenster praktisch „linear" aussieht.

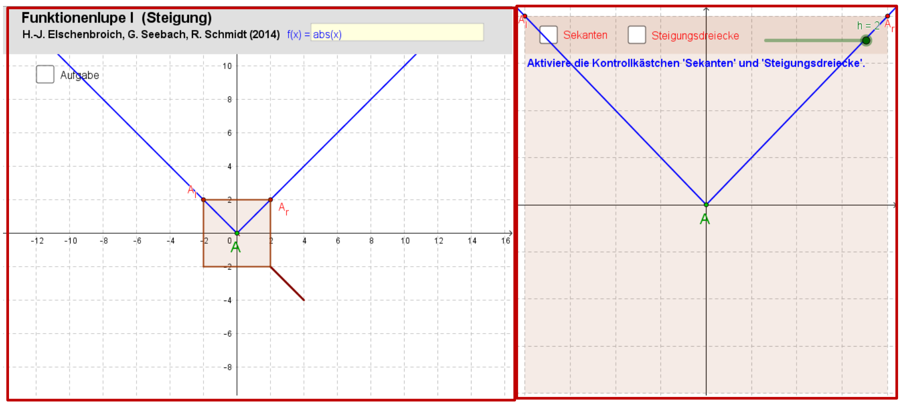
⇔ „Linearisierung"

Aufgabe 2: Funktionenlupe 2 (ggb)

(Elschenbroich (1), 2014)

Gegeben: Funktion $f: f(x) = |x|$

Experimentiere mit der „Funktionenlupe“ bei der Betragsfunktion an der kritischen Stelle x=0!



Man kann zoomen und zoomen … „das Eck geht nicht weg“.

⇨ An dieser Stelle ist Linearisierung nicht möglich

Didaktischer Kommentar:

Die Visualisierung mit Hilfe der Funktionenlupe eignet sich sehr gut für die Entwicklung des Begriffes der Differenzierbarkeit in der experimentellen Phase. In der exaktifizierenden Phase kann man bei Nutzung von CAS Untersuchungen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit machen.

Aufgabe 3: Visualisierung Tangentensteigung (tns)

Quelle: Gertrud Aumayr

Eingabe einer Funktion:f: $f(x) = 0.02 \cdot (x^3 - 10 \cdot x^2) + 5$

a) Ziehe am leeren Punkt auf der x-Achse und beobachte die Veränderung des Steigungsdreiecks.

b) Lese die Werte der Steigung in Abhängigkeit von der Stelle x ab und trage sie in eine Tabelle ein.

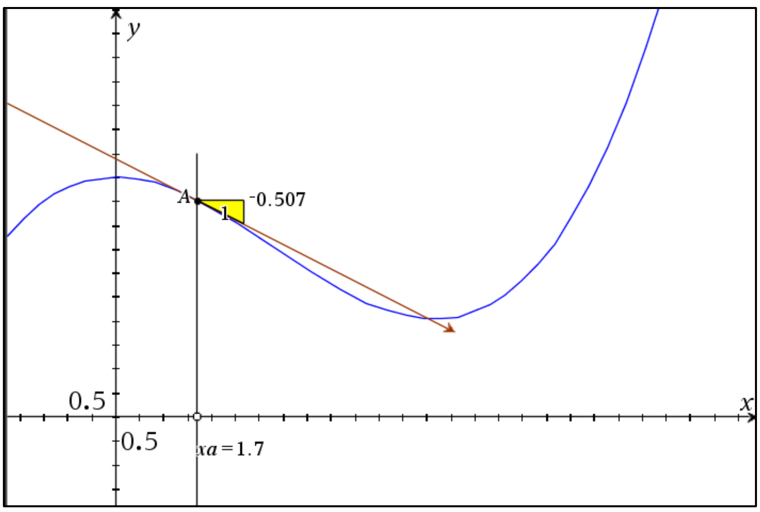
c) Zeichne den Graphen der "Steigungsfunktion" im Graphikfenster des Werkzeugs (Anleitung: Verwende die Graphikeingabe "Scatter Plot")

d) Suche eine passende Regressionsfunktion und zeichne sie ein.

Didaktischer Kommentar:

Für die Entwicklung mentaler Modelle ist die Nutzung verschiedener Repräsentationsformen und ihre Verknüpfung wichtig. In dieser Aufgabe genügt es nicht, die Veränderung des Steigungsdreiecks zu beobachten. Die Arbeitsaufträge der Teile b) bis d) unterstützen aktives Lernen.

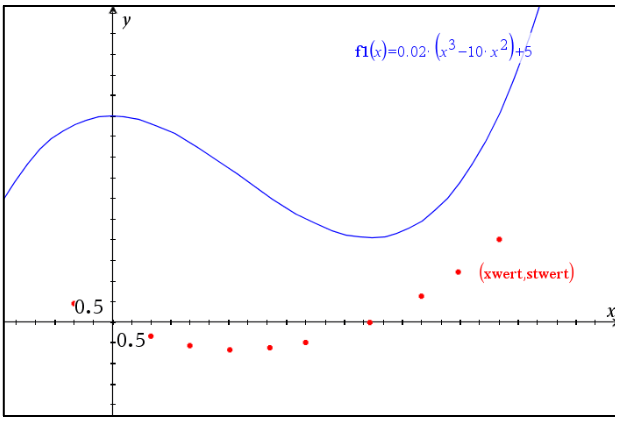
a)

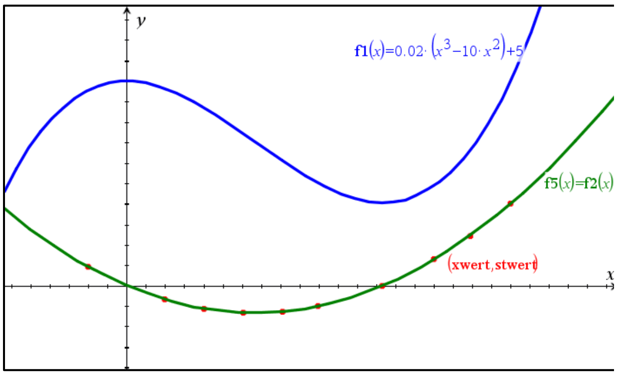


b)

	A xwert	B stwert
=		
1	-1.	0.46
2	1.	-0.34
3	2.01	-0.56
4	3.04	-0.66
5	4.07	-0.63
6	4.99	-0.5
7	6.66	0.
8	8.	0.64

c)





d)

	A xwert	B stwert	C	D	E
=					=QuadReg
1	-1.	0.46		Title	Quadrat...
2	1.	-0.34		RegEqn	a*x^2+b...
3	2.01	-0.56		a	0.059908
4	3.04	-0.66		b	-0.3991...
5	4.07	-0.63		c	0.000369
6	4.99	-0.5		R²	0.999999
7	6.66	0.		Resid	{5.74275...
8	8.	0.64			
9	8.94	1.22			

Didaktischer Kommentar:

Schon bei der Aufgabe 3 beginnt die Loslösung vom konkreten Problem der Sekanten/Tangentensteigung. In der folgenden abstrakten Phase geht es um den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten und um die Beziehung zwischen Funktion und Ableitungsfunktion.

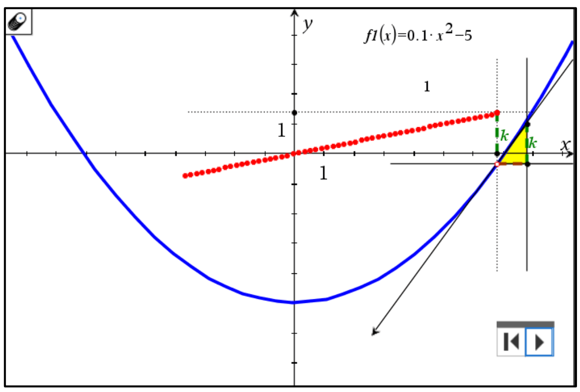
Aufgabe 4: Tangentensteigung und Ableitungsfunktion (tns)

Quelle: Gertrud Aumayr

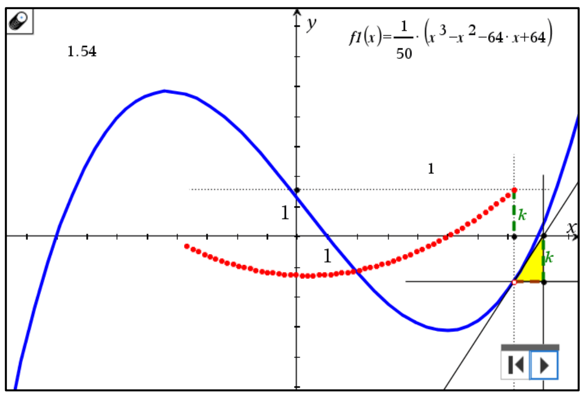
Gegeben sind die Graphen verschiedener Funktionen (quadratische Funktion, Polynomfunktion 3. Grades, Exponential- und Logarithmusfunktion)

Stelle mit Hilfe dieses TI-Nspire Applets die Werte der Tangentensteigungen in Abhängigkeit vom x-Wert des jeweiligen Kurvenpunktes dar. Nutze dazu die Geometriespur.

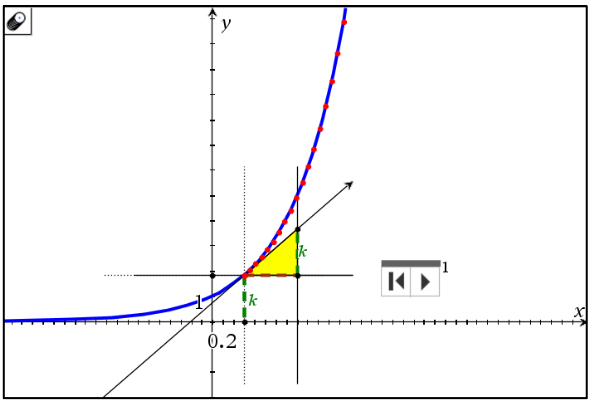
Quadratische Funktion:



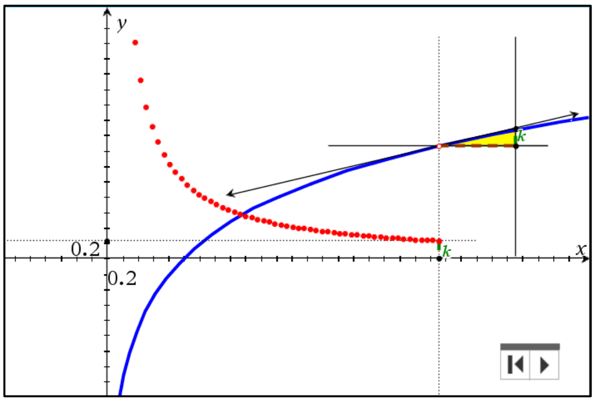
Polynomfunktion 3. Grades



Exponentialfunktion



Logarithmusfunktion



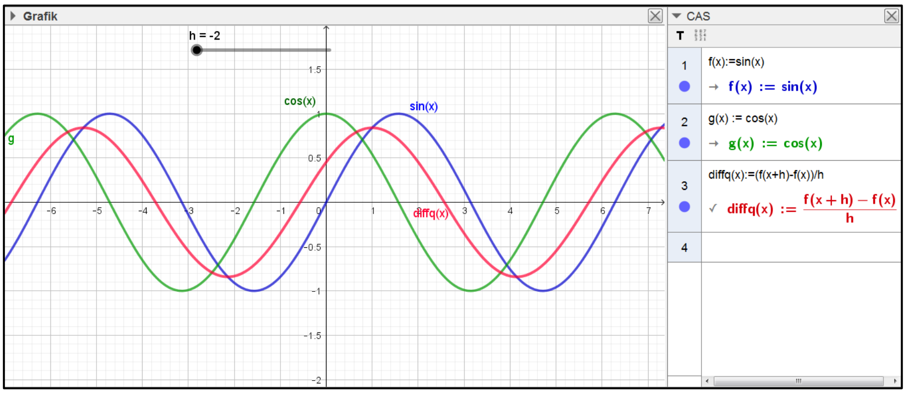
Aufgabe 6: Ableitung der Sinusfunktion (ggb)

Im Graphikfenster sind die Graphen folgender Funktionen gezeichnet:

$$f(x) = \sin(x)$$
$$g(x) = \cos(x)$$
$$diffq(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Für h ist im Intervall [-2,2] ein Schieberegler definiert.

Beobachte den Graphen der Differenzenquotientenfunktion „diffq" wenn h von -2 bis 2 verändert wird. Was passiert bei h=0?

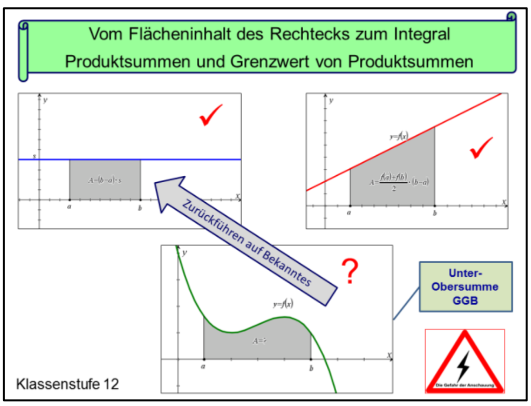


Für h gegen 0 nähert sich diffq der Cosinusfunktion.

Wichtig ist, dass für h=0 der Graph von diffq verschwindet, da die Funktion nicht definiert ist.

2.2 Integralrechnung

Phase 1: Konkrete Phase



Didaktischer Kommentar:

Die erste Unterrichtsstunde zur Integralrechnung findet nicht in der 8. Klasse (12. Stufe) statt, sondern in der 1. Klasse (5. Stufe), wenn man den Flächeninhalt des Rechtecks sauber einführt.

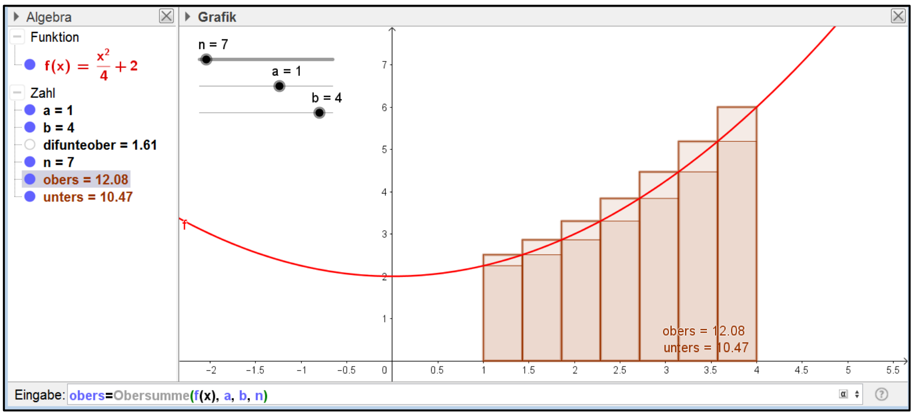
In die 8. Klasse mitgebracht werden auch Flächeninhalte, die sich auf Rechteckflächen zurückführen lassen.

Diese fundamentale Idee des Zurückführens auf Bekanntes führt zum Experimentieren mit Unter- und Obersummen.

Aufgabe 7: **Unter- und Obersummen (ggb)**

Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$

GeoGebra bietet eigene „Vokabeln“ (Funktionen) für die Unter- und Obersumme bei gegebener Funktion f an. Die untere Grenze a, die obere Grenze b und die Anzahl der Rechteckstreifen n kann mittels Schieberegler definiert werden. In der Eingabezeile kann man die Funktionen „unters“, „obers“ und „difunterober“ definieren. Im Algebrafenster kann man die Entwicklung der Werte bei verändertem n beobachten.



Mit wachsendem n nähern sich die Graphen von Unter- und Obersumme immer mehr der Fläche unter der Kurve im gegebenen Intervall.

Die Differenz strebt gegen 0.

Gefahren der alleinigen Nutzung visueller Repräsentationen

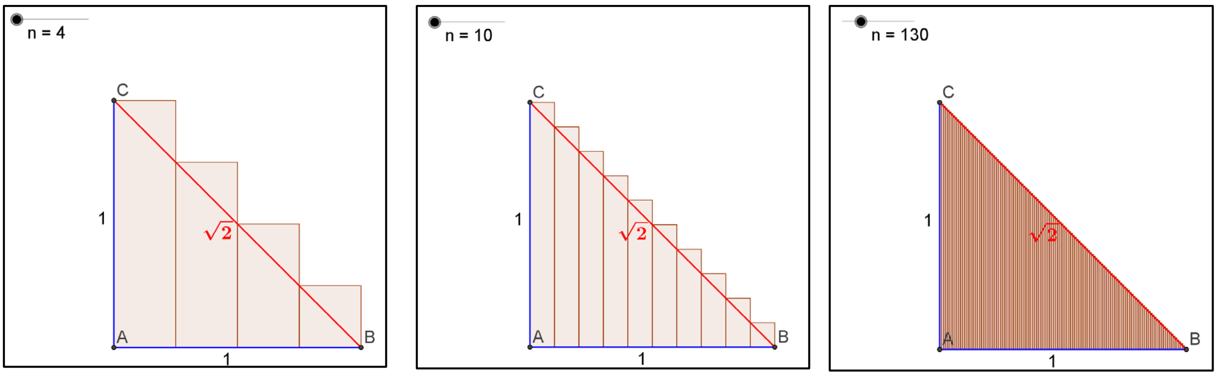
Aufgabe 8: **Was ist $\sqrt{2}$? (ggb)**

Die Definition, die in den Lehrbüchern der 4. Klasse (8. Stufe) steht, ist nicht sehr befriedigend:
„*... jene Zahl, die quadriert 2 ergibt*“ Man gesteht damit ja nur, dass man die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösen kann.
Ein besseres Verständnis für die Idee der irrationalen Zahlen ermöglicht eine Definition von Roland Fischer:

> *Der Schritt zur irrationalen Zahl besteht darin, dass man die Möglichkeit, sich dieser Zahl beliebig gut zu nähern, zur Zahl erklärt.*

Der Vorteil der Technologie besteht darin, dass man diesen Prozess des sich beliebig Näherns visualisieren und in Tabellen darstellen kann.
Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = -x + 1$ im Intervall $[0 \le x \le 1]$, sowie ein Schieberegler für die Variable n und eine Treppe, die man mit Hilfe der Funktion „*Obersumme*“ erzeugt. Man betrachtet die Länge der Treppe.

Wir starten mit n=4 ⇨ die Länge der Treppe ist 2. Wir erhöhen die Anzahl n der Stufen auf n=7,…10,…130, … ⇨ die Länge der Treppe ist immer 2!

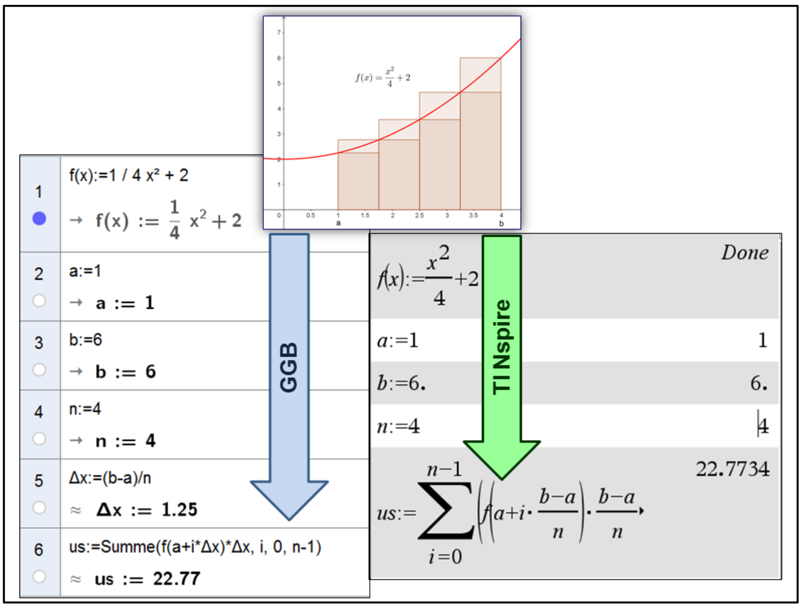


Die Anschauung zeigt uns aber, dass sich die Treppe immer mehr der Diagonalen im gegebenen Quadrat mit der Länge $x^2 = 2$ nähert ⇨die Anschauung sagt: die Länge der Treppe konvergiert gegen $\sqrt{2}$!

Ergebnis: Wir haben eine konstante Folge von Treppenlängen $\langle 2,2,2,2,........\rangle$ mit Grenzwert $\sqrt{2}$. Wir haben „anschaulich“ bewiesen $\sqrt{2} = 2$!

Didaktischer Kommentar:

Ziel der Lernsequenz sollte die Deutung des bestimmten Integrals als Grenzwert von Produktsummen sein. Es genügt daher nicht, sich auf die visuelle Repräsentation der Summe der Rechtecksstreifen zu beschränken. Es sollten auch Produktsummen für kleinere n „händisch“ berechnet werden und danach kann man CAS nutzen, um Produktsummen für größere n und auch ihre Grenzwerte zu ermitteln.



GeoGebra und TI Nspire bieten verschiedene Zugänge an: Bei GeoGebra nutzt man das dafür angebotene Vokabel „Summe“, bei TI Nspire arbeitet man mit dem Summenoperator.

Phase 2: Abstrakte Phase

Wir lassen uns bei der Definition des Integrals von der Interpretation als „Flächeninhalt“ leiten. Haben wir einmal den allgemeinen Integralbegriff gefunden, dann „vergessen“ wir diese Interpretation wieder, da das Integral in vielen anderen Zusammenhängen gebraucht wird. (Cigler 1978, S.117)

Ziel der nächsten beiden Aufgaben ist die Untersuchung der Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Integralfunktion (einer Stammfunktion):

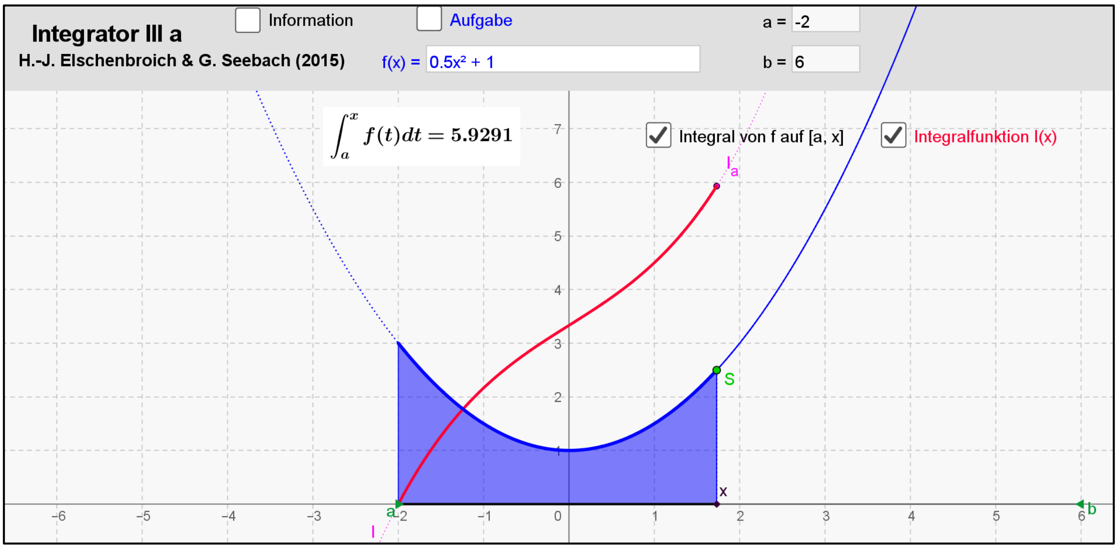
Aufgabe 9: Integraph 1 (ggb)

(Elschenbroich (2), 2014)

Definiert man eine Funktion f und eine untere Grenze a und bewegt man den Punkt S auf dem Graphen mit variablen x-Wert, so wird die Fläche zwischen Graph und x-Achse (violett) und die Größe des Flächeninhalts (der Wert des Integrals) an der Stelle x als Funktionswert (rot) eingezeichnet. Dadurch entsteht der Graph der Integralfunktion I_a.

Gegeben: Funktion $f: f(x) = 0.5 \cdot x^2 + 1$ mit a = -2.

a) Beschreibe das Verhalten der Integralfunktion $I_a(x)$ in Abhängigkeit von f(x).
b) Untersuche dies auch für andere Funktionen.



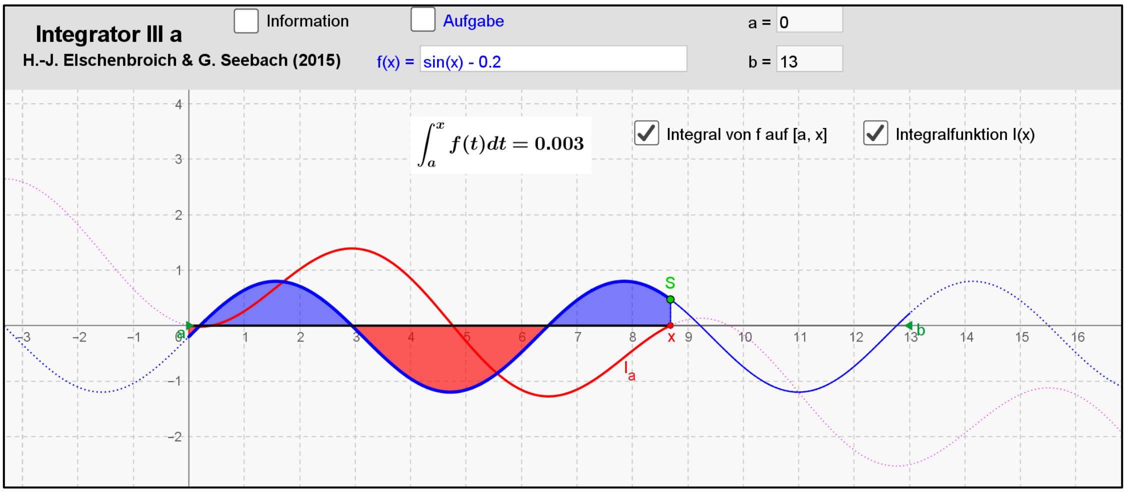
Bei dieser Aufgabe könnte man die Funktion I_a auch noch „Flächeninhaltsfunktion" nennen. Bei der folgenden Aufgabe sollte man, wie im obigen Zitat von Cigler formuliert, bei der Interpretation des bestimmten Integrals die „Flächeninhaltsdeutung" besser vergessen.

Aufgabe 10: Integraph 2 (ggb)

(Elschenbroich (2), 2014)

Gegeben: Funktion $f : f(x) = \sin(x) - 0.2$ mit a = -2.

a) Beschreibe das Verhalten der Integralfunktion $I_a(x)$ in Abhängigkeit von f(x).



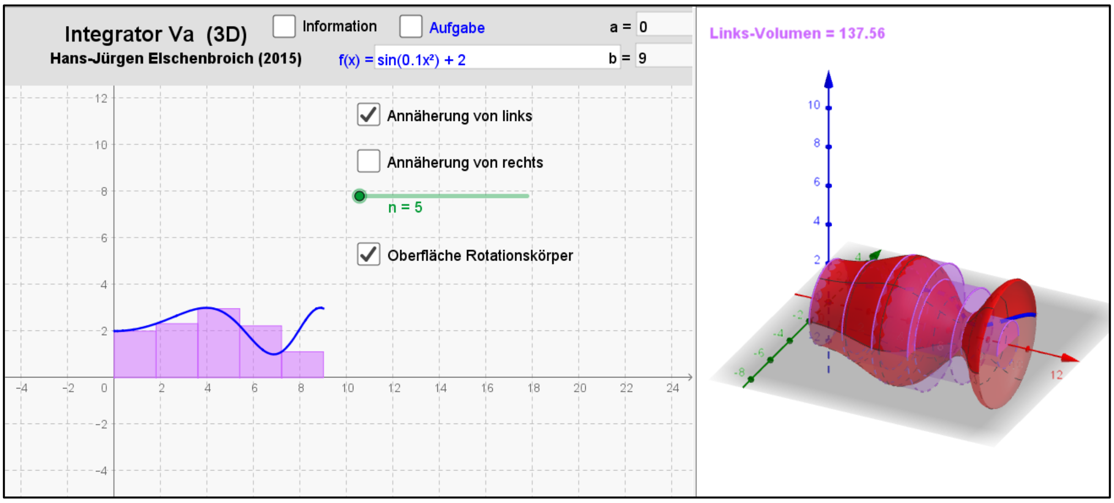
Die Nutzung von 3D-Graphen ermöglicht auch die Visualisierung der Volumsberechnung von Drehkörpern. Ein Rotationskörper entsteht, wenn der Graph einer Randfunktion f um die x-Achse rotiert. Will man das Volumen berechnen, so kann man auf die Idee der Integrierbarkeit zurückgehen und die Untersummen- und Obersummen-Rechtecke mit rotieren lassen. So werden aus den Rechtecken dann zylindrische 'Scheiben'.

Aufgabe 11: Integrator (ggb)

(Elschenbroich (2), 2014)

Gegeben Funktion $f : f(x) = \sin(0.1 \cdot x^2) + 2$ im Intervall [0,9]

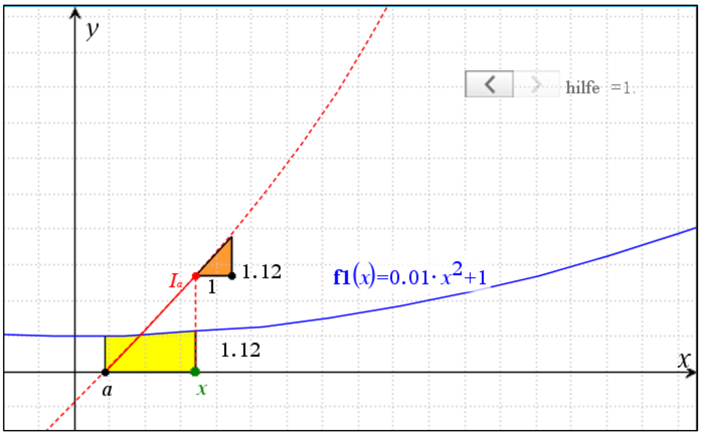
Da f nicht monoton ist, verwendet man besser Links- und Rechtssummen. In der 2D-Graphik sieht man die Rechteckstreifen, die dann bei Rotation um die x-Achse in der 3D-Graphik als Zylinderscheiben dargestellt werden.



Der zentrale Satz ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Auch er kann in der experimentellen Phase durch Visualisierung vorbereitet werden.

Aufgabe 12: Hauptsatz Visualisierung (tns)
Quelle: Gertrud Aumayr

Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = 0.01 \cdot x^2 + 1$. Zieht man, beginnend mit der unteren Grenze x = a den grünen Punkt x entlang der x-Achse, so sieht man die Fläche zwischen Graph und x-Achse gelb und es wird der Graph der Integralfunktion I_a (Flächeninhaltsfunktion als Funktion der rechten Grenze x) gezeichnet (rot). Weiters erkennt man das Steigungsdreieck am Graphen von I_a mit dem Wert der Steigung und auch den Funktionswert der Funktion f an der Stelle x.



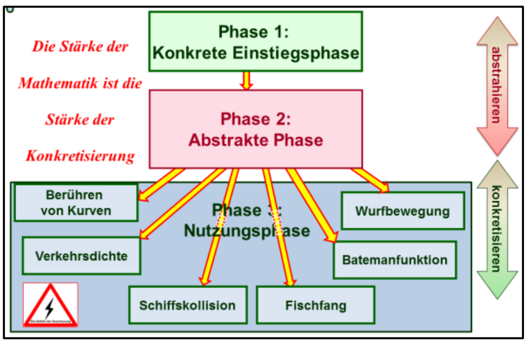
Ergebnis:

An jeder Stelle x ist der Funktionswert f(x) und der Wert der Steigung von $I_a(x)$ gleich.

$$I_a'(x) = f(x)$$

3. Anwendungsphase: Graphische Lösung von Problemen

„Es gäbe die Mathematik nicht, wenn sie nicht anwendbar wäre“ (Dietmar Dorninger, TU Wien).



Das Loslösen vom konkreten Einstiegsproblem und das Entwickeln des mathematischen Konzeptes in der abstrakten Phase eröffnet das Tor für die Nutzung bei vielen konkreten Anwendungen

Die Stärke der Mathematik ist die Stärke der Konkretisierung .(Bruno Buchberger)

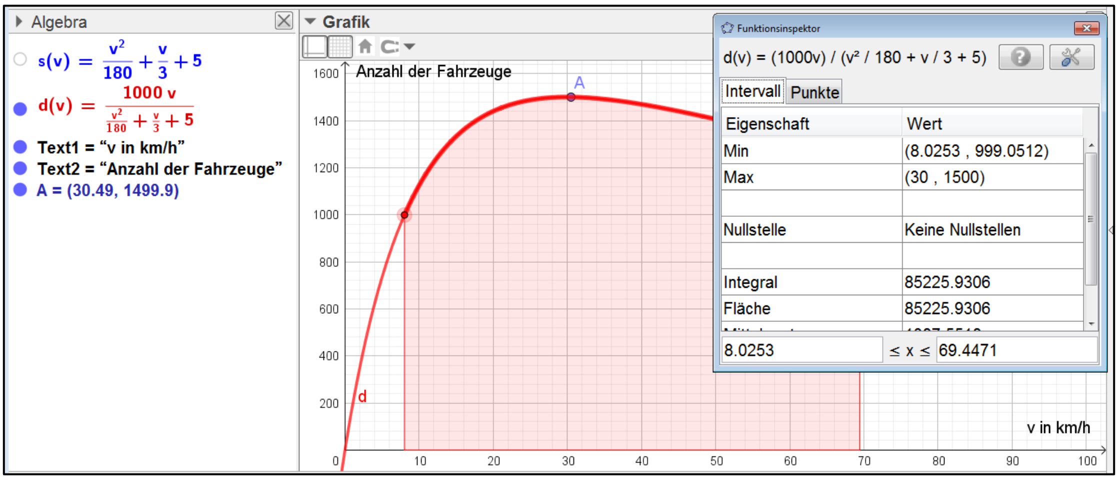
Eine Möglichkeit der Problemlösung ist die graphische Lösung.

Aufgabe 13: Verkehrsdichte (ggb)
(Malle, 2011, S. 88)

Für den Sicherheitsabstand s zweier Autos, die auf trockener Straße fahren, gilt die Faustformel $s(v) = \frac{v^2}{180} + \frac{v}{3} + 5$. Dabei ist v die Geschwindigkeit (in km/h). Beim Aufstellen der Formel wurden der Bremsweg, der Reaktionsweg und die Länge des Fahrzeuges berücksichtigt.

Die Verkehrsdichtefunktion d beschreibt die Anzahl der Fahrzeuge pro Stunde in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v. Sie ist durch folgende Formel gegeben: $d(v) = \frac{1000 \cdot v}{s(v)}$

a) Zeichne den Graphen der Verkehrsdichtefunktion d für $5 \le v \le 100$.
b) Für welche Geschwindigkeit ist die Verkehrsdichte am größten?
c) Überlege, warum die häufige Meinung, die Verkehrsdichte wäre bei hoher Geschwindigkeit sehr groß, falsch ist.



Für die graphische Lösung gibt es bei GeoGebra mehrere Möglichkeiten:

- Man definiert einen Punkt auf dem Graphen und bewegt ihn entlang der Kurve mit dem Cursor. Im Algebrafenster kann man mit Hilfe der Koordinaten das Maximum experimentell bestimmen, oder
- man nutzt die Möglichkeit des "Funktionsinspektors". Dann erhält man eine ganze Reihe von Informationen über die Funktion, unter anderem auch das Maximum.

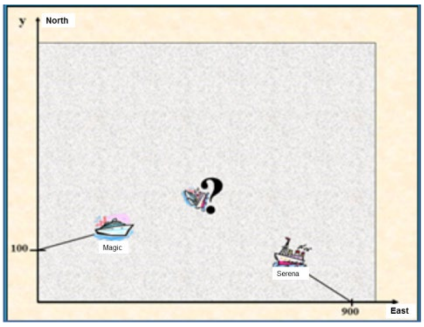
Didaktischer Kommentar:

Betrachtet man die bei solchen Problemen angestrebten Kompetenzen, so kann man häufig nicht glücklich sein, wenn solche Werkzeuge zu viel können. Beim „Funktionsinspektor" wird das Problemlösen außer den nötigen Werkzeugkompetenzen zur Black Box. Dann müsste man aber das Problem anders formulieren, etwa das Modellbilden, das Entwickeln der Funktionen s und d in den Mittelpunkt stellen.

Je nach erwarteter Problemlösung ist die Wortwahl bei der Aufgabenstellung wichtig: Verwendet man das Wort „ermittle" kann die Schülerin/der Schüler auch den „Funktionsinspektor" nutzen, verlangt man aber „berechne", muss das Maximum durch Berechnung der 1. Ableitung ermittelt werden.

Aufgabe 14: Schiffskollision? (tns)

Die Kurse zweier Schiffe kreuzen einander. Sie befinden sich auf einem rechteckigen Radarschirm, der geographisch orientiert ist (W-O/N-S), in folgender Position: Die HMS Serena befindet sich am unteren Rand des Schirms (x Achse) 900 mm von der linken unteren Ecke des Schirms entfernt, die HMS Magic erscheint am linken Rand des Schirms (y-Achse) 100 mm von der linken unteren Ecke entfernt.



Eine Minute später beobachtet man folgende Position: Die HMS Serena hat sich 3 mm nach Westen und 2 mm nach Norden bewegt, die HMS Magic 4 mm nach Osten und 1 mm nach Norden. (1 mm entspricht 100 m)

a) Werden die beiden Schiffe kollidieren, wenn sie ihren Kurs und ihre Geschwindigkeit beibehalten? Wenn ja, wo?
b) Wenn nein, wie nahe kommen die beiden Schiffe?

$serena(t):=\begin{bmatrix}900.\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}^-3\\2\end{bmatrix}$ *Done*

$magic(s):=\begin{bmatrix}0\\100.\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ *Done*

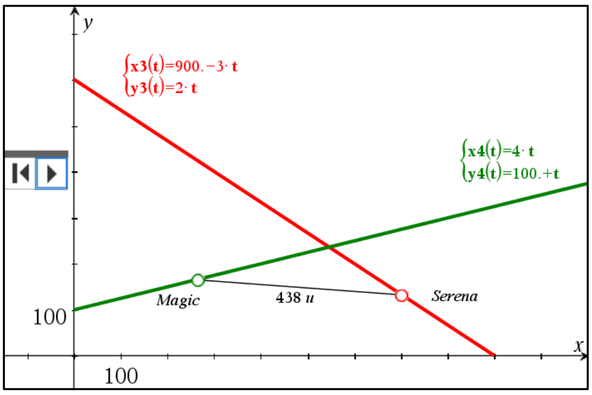
$\mathrm{solve}(serena(t)=magic(s),\{t,s\})$ $s=136.36364$ and $t=118.18182$

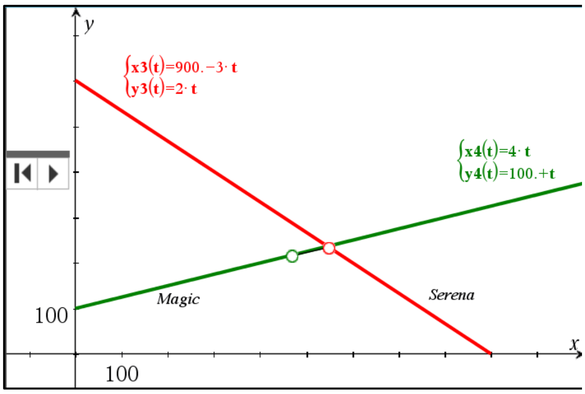
$serena(118.18182)$ $\begin{bmatrix}545.45454\\236.36364\end{bmatrix}$

$magic(136.36364)$ $\begin{bmatrix}545.45456\\236.36364\end{bmatrix}$

Solche Probleme habe ich auch Schülerinnen und Schülern ohne Technologienutzung gegeben.
Sie haben die Gleichungen der Bahnen aufgestellt und den Schnittpunkt ermittelt. Manche haben dann den Schluss gezogen: „Hier kollidieren sie“. Kritische Schülerinnen und Schüler haben aber gefragt, ob sie denn zur selben Zeit am Schnittpunkt sind.
Diese Diskussion führte zur kontextmäßigen Deutung der Parameter: Sie beschreiben die Zeit in Minuten.

Neue Möglichkeiten durch Technologienutzung: Mit Werkzeugen wie dem TI Nspire kann man nicht nur die Graphen zeichnen und den Schnittpunkt ermitteln, man kann auch die Bewegung der Schiffe in Abhängigkeit von der Zeit „animieren“. Dann sieht man, ob sie zur selben Zeit am Schnittpunkt der Bahnen sind. Man könnte sogar bei der Animation ihre Distanz in Abhängigkeit von der Zeit beobachten.





Für die Berechnung der Geschwindigkeiten und die Ermittlung der minimalen Distanz benötigt man aber CAS:

$\text{norm}(serena(1)-serena(0))$	3.6055513
$\text{norm}(magic(1)-magic(0))$	4.1231056
$3.6055513\cdot 6$	21.633308
$v_{Serena}=3.6055513\cdot 6$	$v_{Serena}=21.633308$
$v_{Magic}=4.1231056\cdot 6$	$v_{Magic}=24.738634$

$\text{norm}(serena(t)-magic(t))$	$5\cdot\sqrt{2\cdot(t^2-256.\cdot t+16400.)}$
$dist(t):=\text{norm}(serena(t)-magic(t))$	*Done*
$dist1(t):=\frac{d}{dt}(dist(t))$	*Done*
$\text{solve}(dist1(t)=0,t)$	$t=128.$
$dist(128)$	28.284271
$28.284271\cdot 100$	2828.4271

Didaktischer Kommentar:

Die durch Technologie mögliche wichtigste inhaltliche Neuerung im Mathematikunterricht ist die Nutzung rekursiver Modelle. Der Schwerpunkt liegt auf der Modellbildung, die Simulation und die graphische Darstellung funktioneller Abhängigkeiten ermöglicht das Werkzeug. Ein weiterer Schwerpunkt ist die Untersuchung des Einflusses von Parametern auf die Lösungen.

Aufgabe 15: Fischfang (tns)

In einem See gibt es derzeit etwa 6 000 Fische (u0). Die Fischpopulation vermehrt sich pro Jahr um 10%. Die maximal mögliche Fischmenge im See wird auf 8 000 geschätzt.

a) Entwickle ein mathematisches Modell für die Entwicklung der Fischpopulation.
b) "Konstante Fangquote": Es wird vereinbart, jährlich 7,5% des Anfangsbestandes zu fangen (r = 0,075). Wie entwickelt sich die Fischpopulation?
c) "Variable Fangquote“: Es wird vereinbart, jährlich 7,5% des jeweils aktuellen Bestandes zu fangen. Wie entwickelt sich die Fischpopulation?
d) Definiere einen Schieberegler für die Fangrate r mit 0 < r < 0,2 und verändere die Fangrate ausgehend von r = 0,075. Interpretiere die Entwicklung der Fischpopulation bei konstanter und variabler Fangquote.

Schritt 1: Modellbildung:

a) Logistisches Wachstum

$$\begin{cases} \mathbf{u1}(n)=\mathbf{u1}(n-1)+0.1\cdot \mathbf{u1}(n-1)\cdot\dfrac{8000-\mathbf{u1}(n-1)}{8000} \\ Anfangswert(e):=6000 \\ 0\le n\le 50 \quad nstep=1 \end{cases}$$

Der Zuwachs ist proportional zum aktuellen Bestand und zum relativen Anteil der freien Plätze (c=0.1)

b) Konstante Fangrate

$$\begin{cases} \mathbf{u2}(n)=\mathbf{u2}(n-1)+0.1\cdot \mathbf{u2}(n-1)\cdot\dfrac{8000-\mathbf{u2}(n-1)}{8000}-\mathbf{r}\cdot 6000 \\ Anfangswert(e):=6000 \\ 0\le n\le 50 \quad nstep=1 \end{cases}$$

Gefangen wird ein Anteil des Anfangsbestandes (r=0.075)

c) Variable Fangrate

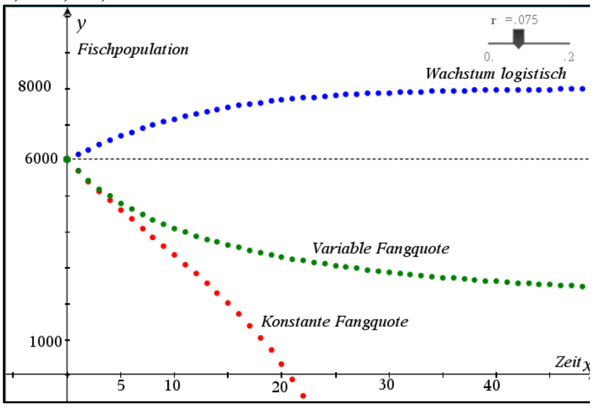
$$\begin{cases} \mathbf{u3}(n)=\mathbf{u3}(n-1)+0.1\cdot \mathbf{u3}(n-1)\cdot\dfrac{8000-\mathbf{u3}(n-1)}{8000}-\mathbf{r}\cdot \mathbf{u3}(n-1) \\ Anfangswert(e):=6000 \\ 0\le n\le 50 \quad nstep=1 \end{cases}$$

Gefangen wird ein Anteil des aktuellen Bestandes (r=0.075)

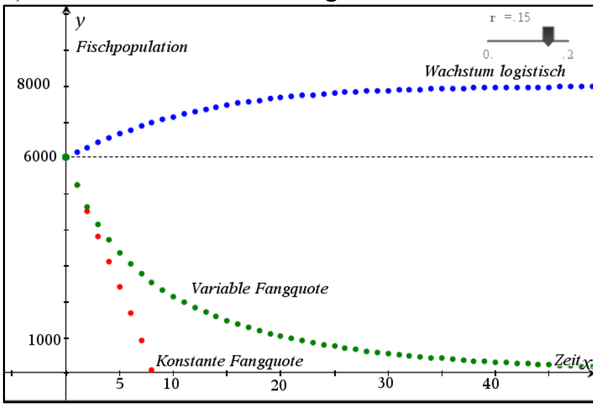
Schritt 2: Simulation und graphische Darstellung der funktionalen Abhängigkeit

Schritt 3: Untersuchung der Abhängigkeit der Populationsentwicklung vom Parameter r mit Hilfe eines Schiebereglers

a) b) c) mit r =0.075



d) Nutzen eines Schiebereglers für r.



Aufgabe 16: Batemanfunktion (tns)

(Frey, 2014)

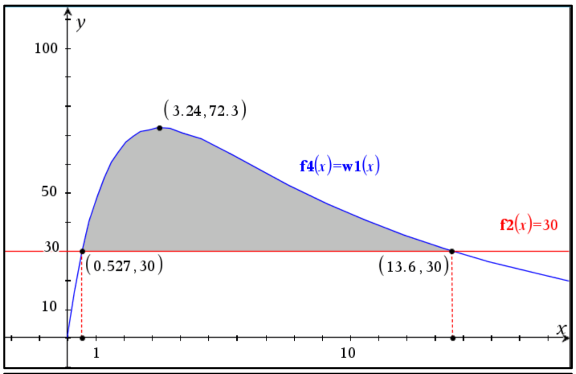
Die Bateman-Funktion ist ein vereinfachtes Modell, das die Aufnahme eines Medikamentes in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Die Wirkstoffmenge im Blut nach Einnahme eines Schmerzmittels mit 100 mg Wirkstoff wird beschrieben durch $w1(x) = 116.7 \cdot \left(e^{-0.1 \cdot x} - e^{-0.7 \cdot x}\right)$. Die Zeit x wird in Stunden, die Wirkstoffmenge w1(x) in mg angegeben. Das Medikament wirkt nur, wenn mindestens 30 mg Wirkstoff im Blut vorhanden sind. Sind mehr als 110 mg vorhanden, wird dem Patienten übel.

a) Nach welcher Zeit nach der Einnahme der Tablette wirkt diese? Wie lange wirkt eine Tablette? Wie groß ist die Maximalmenge im Körper? Stelle die Situation graphisch dar.
b) Wann muss, falls nötig, eine zweite Tablette eingenommen werden? Wie groß ist die Maximalmenge im Körper nach einnehme der zweiten Tablette?
c) Ab wann darf eine zweite Tablette frühestens eingenommen werden, so dass die Wirkstoffmenge von 110 mg nicht überschritten wird?

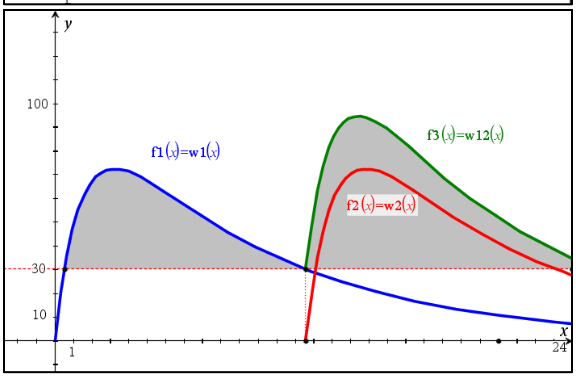
a)

$w1(x):=116.7\cdot\left(e^{-0.1\cdot x}-e^{-0.7\cdot x}\right)$	Done
$\text{solve}(w1(x)=30,x)$	$x=0.526742$ or $x=13.5812$
$\text{zeros}\left(\frac{d}{dx}(w1(x)),x\right)$	$\{3.24318\}$
$w1(3.24318)$	72.3227



b)

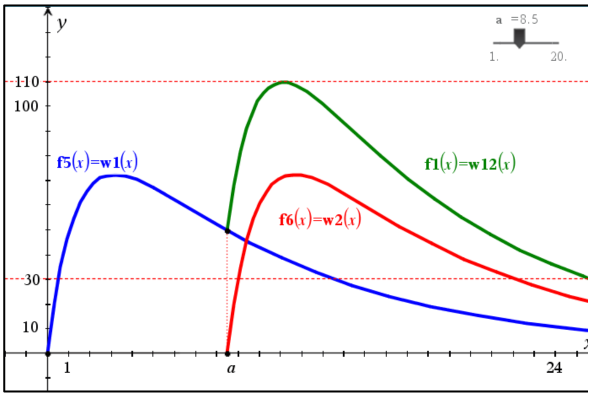
$w1(x):=116.7\cdot\left(e^{-0.1\cdot x}-e^{-0.7\cdot x}\right)\vert x\geq 0$	Done
$w2(x):=w1(x-13.5812)\vert x\geq 13.5812$	Done
$w12(x):=w1(x)+w2(x)\vert x\geq 13.5812$	Done
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(w12(x))=0,x\right)$	$x=16.4431$
$w12(16.4431)$	94.4535



Während bei den Aufgabenteilen a) und b) die Lösung rechnerisch erfolgt und erst das Ergebnis visualisiert wird, erfolgt die Lösung im Teil c) graphisch. Es wird für die Variable a ein Schieberegler definiert und danach wird a so lange verändert, bis das Maximum der Konzentration unter der „Schmerzgrenze von 110 mg liegt.

c)

$w1(x):=116.7\cdot\left(e^{-0.1\cdot x}-e^{-0.7\cdot x}\right)\vert x\geq 0$	*Done*
$w2(x):=w1(x-a)\vert x\geq a$	*Done*
$w12(x):=w1(x)+w2(x)\vert x\geq a$	*Done*



Zusammenfassung

Zur Rolle der Mathematik und zu ihrer Arbeitsweise sagt Bruno Buchberger:

- *Ziel der Mathematik ist Trivialisierung von Mathematik*
- *Der Weg zur Trivialisierung ist absolut nicht trivial*

Gerade die Technologienutzung bietet die große Chance, sich im Unterricht mehr mit dem Weg zur Trivialisierung zu beschäftigen, Begriffe und Algorithmen verständnisvoll zu entwickeln und zu nutzen. Dabei spielt die Visualisierung besonders in der experimentellen Phase eine wichtige Rolle.

Technologie unterstützt die Entwicklung mentaler Modelle. Eine Interaktion zwischen verschiedenen parallel verfügbaren Repräsentationen ist leichter möglich und Repräsentationen können auch einfacher verändert werden. Insbesondere die Interaktion mit algebraischen Repräsentationen ist bei der Begriffsentwicklung und bei der Problemlösung wichtig, besonders dann, wenn exakte Antworten und Lösungen erwartet werden.

Quellen

Cigler, J. (1978): „Einführung in die Differentiaö- und Integralrechnung“ Teil 1, S. 117. Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung. ISBN 3-2014-00050-0

Dörfler, W. (1991): „Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium“ in Computer - Mensch – Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991, pp51. ISBN3-209-01452-3.

Elschenbroich H.J., u.a. (2014): Funktionenlupe. http://www.funktionenlupe.de/

Elschenbroich H.J., u.a. (2014): „Der Integrator“ http://www.integrator-online.de/

Frei B., Hugelshofer R., Märki R. 2014: „Funktionen und Modelle, kontinuierlich und diskret“. P.99. TI Materialien: https://ti-unterrichtsmaterialien.net/

Hanisch, G., Sattlberger, E. (2008): „Neuropsychologische Grundlagen der Mathematikdidaktik“ https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2008%20Band%2041/VortragHanischSattlberger.pdf

Heugl, H. (2014): „Mathematikunterricht mit Technologie – ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl von Aufgaben“. Veritas-Verlag, Linz. ISBN 978-3-7101-0431-2

Kimmeswenger, B., 2012: „Visualisierung in der mathematischen Begriffsbildung“ Diplomarbeit an der JKU Linz bei Prof. Markus Hohenwarter. http://mathematech.pbworks.com/w/file/fetch/60248942/Diplomarbeit_Kimeswenger.pdf

Laakmann, H., 2012: “Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung“ Verlag Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-01592-6

Malle, G. u.a.,2011: „Mathematik verstehen 7“ S. 88. OBV Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH, ISBN 978-3-209-07105-7

Medizinische Universität Wien, (2008): „Kompartmentmodelle in der Pharmakokinetik“ Praktikum Medizinische Informatik, 2008, S.21. http://www.meduniwien.ac.at/msi/biosim/ssm3/pk.pdf

Schmitz, A.: „Visualisierung in Mathematik und Mathematikdidaktik“. In: „Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht“**.** http://www.springer.com/978-3-658-18424-7 P. 13 - 48. ISBN 978-3-658-18425-4

Verfasser:

Dr. Helmut Heugl
ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra)
hheugl@aon.at